ESSEC

Ecole Supérieure des Sciences Economiques et Commerciales

Etablissement d'enseignement supérieur privé reconnu par l'Etat

CONCOURS D'ADMISSION DE 1987

MATHEMATIQUES - 1ère épreuve - option économique

Lundi 18 Mai de 14h à 18h

Les trois exercices sont totalement indépendants et peuvent être traités dans un ordre arbitraire.

Exercice 1 : détermination de valeurs approchées de $\ell n 2$

(A) Calcul de $I(p,q) = \int_0^1 x^p (1-x)^q dx \quad (p,q) \in \mathbb{N}^2$

1. Déterminer, à l'aide d'une intégration par parties, une relation de récurrence entre $I(p,q)$ et $I(p-1, q+1)$, lorsque (p,q) appartient à $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$.

2. En déduire la valeur de $I(p,q)$.

3. On note dans la suite $J_n = I(n,n)$.

   Montrer, en majorant $x(1-x)$ sur $[0,1]$ que $J_n \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^n$

(B) Etude d'une suite de polynômes

On désigne par n un entier supérieur ou égal à 1.

1. Déterminer λ_n pour que -1 soit racine du polynôme P_n défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad P_n(x) = 1 + \lambda_n x^n (1-x)^n$$

   λ_n étant ainsi choisi dans toute la suite, on note Q_n le polynôme défini par : $\forall x \in \mathbb{R} \quad P_n(x) = (x+1) Q_n(x)$.

2. Expliciter $Q_1(x)$ et $Q_2(x)$.

3. Montrer, sans chercher à expliciter $Q_n(x)$, que :

$$(1) \quad \forall n \geqslant 1 \quad Q_{n+1}(x) - Q_n(x) = \left[-\frac{x(1-x)}{2}\right]^n Q_1(x)$$

(C) Calcul d'une valeur approchée de $\ell n 2$

On note, pour $n \geqslant 1$, $u_n = \int_0^1 Q_n(x) dx$.

1. Calculer u_1 et u_2.

2. En remarquant que $u_2 = \int_0^1 \frac{P_2(x)}{1+x} dx$, montrer que :

$$u_2 + \frac{J_2}{8} \leqslant \ell n 2 \leqslant u_2 + \frac{J_2}{4}$$

3. En déduire une valeur approchée de $\ell n 2$ et donner la précision de cette approximation.

(D) Généralisation

1. Démontrer que : $|u_n - \ell n 2| \leqslant \left(\frac{1}{8}\right)^n$ et que $\ell n 2$ est compris entre u_n et u_{n+1}.

2. Démontrer, en utilisant (1) que :

$$\forall n \geqslant 1 \quad u_{n+1} - u_n = (-1)^n \frac{3}{2^{n+2}} J_n$$

3. On note $v_1 = u_1$ et, pour $n \geqslant 1$, $v_{n+1} = u_{n+1} - u_n$.

   Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n et de l'entier n.

4. Programmer un algorithme de calcul de u_n. L'utiliser pour obtenir des valeurs approchées de u_{10} et u_{11} ainsi qu'un encadrement de $\ell n 2$.

Exercice 2 : Résolution d'un système linéaire par la méthode de Gauss

On désigne par n un entier supérieur ou égal à 2, par $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ une suite de n nombres réels strictement positifs et enfin par $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ une suite de n nombres réels.

On se propose de résoudre le système de n équations linéaires à n inconnues qui s'écrit sous forme matricielle $AX = B$ avec :

Tournez la page S. V. P.

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & a_2 & 1 & 0 & \\ 0 & -1 & a_3 & 1 & 0 \\ & 0 & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & 0 & -1 & a_n \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$ (matrice inconnue)

(A) Inversibilité de la matrice A

1. Vérifier que les conditions : $\begin{cases} d_1 = a_1 \\ d_{i+1} = a_{i+1} + \frac{1}{d_i} \text{ pour } 1 \leqslant i \leqslant n-1 \end{cases}$

définissent une suite unique $(d_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de nombres réels strictement positifs.

2. On note, pour tout entier i tel que $1 \leqslant i \leqslant n$:

$$A_i = \begin{pmatrix} d_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & d_3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & & \ddots & 1 \\ & & 0 & -1 & a_n \end{pmatrix}$$

Par quelle opération élémentaire sur les lignes de la matrice A_i, la matrice A_{i+1} se déduit-elle de A_i, pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$?

3. En déduire que A et A_n sont des matrices équivalentes et que A est inversible.

(B) Résolution du système AX = B

On désigne par $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ une suite de n nombres réels, et on note, pour $1 \leqslant i \leqslant n$:

$$B_i = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_i \\ b_{i+1} \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

1. Déterminer r_1 en fonction de b_1, puis pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$, r_{i+1} en fonction de r_i, d_i et b_{i+1} de telle sorte que le système $A_i X = B_i$ soit équivalent au système $AX = B$ pour tout i tel que $1 \leqslant i \leqslant n$.

2. Exprimer enfin x_n en fonction de r_n et d_n et, pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$, x_i en fonction de x_{i+1}, r_i et d_i.

(C) Exemple

On suppose désormais que : $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ $a_i = \frac{2}{i}$ et $b_i = 1$.

1. Montrer que, pour $1 \leqslant i \leqslant n$: $d_i = \frac{i+1}{i}$

2. Déterminer la suite $(r_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ (on pourra poser $u_i = ir_i$)

3. En déduire la solution du système $AX = B$.

Exercice 3 - approximation de $x \longmapsto -x\ell nx$ sur $]0,1]$ par une fonction affine

(A) Etude d'une fonction

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*} - \{1\}$ par $g(x) = \frac{x\ell nx}{x-1}$ et prolongée par continuité en 0 et 1.

Tournez la page S. V. P.

1. Que valent $g(0)$? $g(1)$?
   g est-elle dérivable en 0 ?
   Ecrire le développement limité d'ordre 1 de g au voisinage de 1 (on posera $x = 1+h$). En déduire l'existence et la valeur de $g'(1)$.

2. Calculer $g'(x)$ pour x strictement positif et différent de 1.
   Etudier le signe de g' (on pourra pour cela étudier les variations de la fonction figurant au numérateur).
   Dresser le tableau de variations de g .

3. Montrer que g admet une fonction réciproque, notée h , dérivable sur son ensemble de définition que l'on précisera.

4. Tracer les courbes représentatives de g et h dans un même repère.

5. Application : discuter, suivant les valeurs du paramètre réel λ , le nombre de solutions dans $]0,1[$, de l'équation : $\lambda(1-x) + x\ell nx = 0$
   (quand cette équation possède une racine, l'exprimer en fonction de λ et h).

(B) Etude de $f(\lambda) = \int_0^1 |\lambda(1-x)+x\ell nx|\,dx$

1. Calculer $\int_0^1 x\ell nx\,dx$.

2. Calculer $f(\lambda)$ pour $\lambda \leq 0$ et pour $\lambda \geq 1$.

3. On suppose que $\lambda \in]0,1[$

   Montrer que $f(\lambda) = 2\left[\lambda \int_0^{h(\lambda)} (1-x)dx + \int_0^{h(\lambda)} x\ell nx\,dx\right] - \frac{\lambda}{2} + \frac{1}{4}$

   En déduire que f est dérivable sur $]0,1[$ et que :

   $$f'(\lambda) = \frac{1}{2} - [1-h(\lambda)]^2$$

4 - Dresser le tableau de variation de f . f est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

   En déduire λ_0 tel que $f(\lambda_0) = \inf_{\lambda \in \mathbb{R}} f(\lambda)$